

NUMERICAL ANALYSIS OF A NONLINEAR RADIOTECHNICAL CIRCUIT

Zauytbek.K. Kuralbaev, Assel.A. Yerzhan

Kazakh National Technical University after K.I. Satpayev, Republic of Kazakhstan, Almaty

Abstract

Analysis of nonlinear electronic circuits requires solutions to two important problems: determination of a functional relationship between current and voltage in a nonlinear element, and solution of a mathematical problem related to non-linear equations. The article deals with the solution of these problems for an RC-circuit. To solve the first problem, the results of experiments and their mathematical treatment in order to obtain explicit dependency of current and voltage, expressed in the form of equations of the current-voltage characteristics (CVC) were used. Various nonlinear elements of a radio technical circuit were considered. A number of approximating function types was suggested. The method of least squares was used for the mathematical treatment of experimental data, and the obtained transcendental equations were solved by iterative methods on a computer. Functional dependencies found were used for formulating and solving mathematical problems derived from the mathematical modeling of processes in the RC-circuit. As a result of mathematical modeling of the electronic circuit with a nonlinear element, the Cauchy problem for a system of nonlinear differential equations was obtained. The numerical solution to the mathematical problem allowed conducting a comparative analysis of various special cases of the effect a nonlinear element has on the process in an RC-circuit.

Key words: radio systems, the transition process, the electrical circuit, circuit theory.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в отличие от анализа линейных электрических схем, анализ нелинейных схем приводит к решению задач, представляющих определенные трудности (Bakalov & Dmitracov & Kruk 2000). Для линейных схем во временной области существует метод анализа, “основанный на получении требуемой характеристики схемы в виде рациональной функции комплексной переменной с последующим определением полюсов данной функции” (Fiddler & Nightingale 1985). После этого используются методы операционного исчисления для ее прямого преобразования во временную область. Для таких линейных схем используется известный метод преобразования Лапласа. Кроме этого для анализа линейных схем используется классический метод, который используется для решения систем линейных дифференциальных уравнений, возникающих в результате математического моделирования процессов, происходящих в электрической цепи.

Однако такие методы для нелинейных схем не применимы. Потому что математическое моделирование процессов в таких цепях приводит к решению нелинейных дифференциальных уравнений. В связи с этим для решения задач, связанных с нелинейными уравнениями, и вследствие этого для анализа нелинейных схем используются различные численные методы, позволяющие использовать компьютерную технику. В данной статье в качестве примера рассматривается численное решение задачи анализа одной нелинейной электрической цепи.

Следует отметить, что с помощью компьютера можно легко решить задачу, которая сложно решается другими методами, в частности, с помощью экспериментов. Однако для применения

численных методов решения задачи на компьютере необходимо иметь достоверную модель нелинейных элементов для разработки математической модели задачи. По мнению многих исследователей (Bakalov & Dmiracov & Kruk 2000), данная проблема является одной из сложных, потому что любые погрешности в моделях могут свести на нет все усилия. В связи с этим одним из центральных вопросов расчета и проектирования электрических схем является разработка математических моделей компонентов схем.

Известно, что на практике часто возникает проблема, связанная с нелинейностью вольт-амперных характеристик, т.е. с определением зависимости тока от напряжения, элементов электронной цепи. Известно, что любая электронная цепь, у которой «реакции и воздействие связаны нелинейными элементами» называется нелинейной (Bakalov & Dmiracov & Kruk 2000). Вольт-амперные характеристики элементов цепи обычно определяются в результате проведенных экспериментов. В литературе (Bakalov & Dmiracov & Kruk 2000) приведено большое разнообразие графических представлений ВАХ различных элементов электронных цепей. Результаты экспериментов в основном представлены в виде графиков и в практических расчетах широко используются графические методы, кусочно-линейная аппроксимация и другие. Однако для теоретического исследования и анализа электронных цепей необходимо аналитическое представление ВАХ нелинейных элементов (Bakalov & Dmiracov & Kruk 2000). Поэтому возникает важная для практики проблема определения аналитических формул, описывающих зависимости между током и напряжением в цепях. С другой стороны, «... анализ нелинейных систем в математическом отношении значительно труднее, чем анализ линейных систем» (Fiddler & Nightingate 1985).

В связи с этим возникает необходимость исследования различных подходов к данной проблеме, и сделать выбор видов функций, позволяющих наилучшим образом аппроксимацию ВАХ нелинейных элементов цепи.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В связи с необходимостью для разработки математической модели электронной схемы иметь явную зависимость токов и напряжений, выраженную в форме уравнений ВАХ, требуется определить функциональную связь между током и напряжением.

В общем случае электрическая цепь содержит не только элементы, которые с достаточной степенью точности можно считать линейными, но явно нелинейные элементы. Нелинейные элементы отличаются тем, что их параметры (R , L , C) являются функциями приложенного к ним напряжения. Уравнения таких цепей, составленные на основании законов Кирхгофа (Bakalov & Dmiracov & Kruk 2000), будут нелинейными. Эти уравнения определяются по результатам экспериментов. Они сводятся к графическому определению величины протекающего в цепи тока при нескольких значениях напряжения и проведению по токам плавной кривой.

Обычно для этой цели используют аппроксимацию экспериментальных данных. В литературе (Bakalov & Dmiracov & Kruk 2000) предложены различные виды аппроксимирующих функций. Целесообразно привести некоторый анализ свойств этих функций.

Экспериментальные или статистические данные являются основной информацией для определения аналитических зависимостей между рассматриваемыми переменными (показателями). Требуется определить функцию, описывающую такую зависимость между этими переменными, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В данной статье проводится анализ различных вариантов аппроксимирующих функций, используемых для описания функциональной зависимости тока от напряжения. Также будут определены неизвестные параметры, от которых зависят эти функции.

Переход к безразмерным переменным. Перед тем как перейти к анализу этих функций, целесообразно использовать безразмерные величины. Переход к безразмерным величинам и использование в расчетах безразмерных параметров обеспечивают определенные удобства при решении задачи на компьютере. Для перехода к безразмерным переменным требуется выбрать характерные величины для данной задачи.

Пусть U_0 – некоторое напряжение, являющееся характерным для данного компонента. Тогда $\frac{U_0}{R}$ может быть характерной величиной тока для постоянного значения сопротивления R . Переход к безразмерным величинам осуществляется с помощью следующих формул:

$$x = \frac{u}{U_0}, \quad y = \frac{i \cdot R}{U_0} \quad (1)$$

Здесь: x – безразмерное напряжение, y – безразмерный ток.

С учетом этих формул (1) искомая аппроксимирующая функция может быть записана в следующем виде: $i = \frac{U_0}{R} \cdot f(x)$ или $y = f(x)$. (2)

Здесь $f(x)$ будет искомой функцией, определяющей зависимость между безразмерным током и безразмерным напряжением.

Из анализа существующих способов аппроксимации экспериментальных данных (Fiddler & Nightingale 1985) следует, что чаще всего используются следующие функции:

- линейная функция: $y = a \cdot x + b$, где a, b – неизвестные параметры;

- квадратичная функция: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, где a, b, c – неизвестные параметры;

- экспоненциальная функция: $y = a \cdot (1 - \exp(-\frac{x}{a}))$ (3)

и гиперболический синус: $y = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}$. (4)

Линейная и квадратичная функции для аппроксимации статистических или экспериментальных данных используются давно и успешно во многих областях науки. Однако линейная функция вида $y = a \cdot x + b$ используется только для линейных цепей, и использование ее для описания нелинейных элементов электронных схем нецелесообразно. Широкое применение получило использование квадратичной функции вида $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Последние две функции (3) и (4) представляют определенный интерес, они также могут быть использованы для аппроксимации экспериментальных данных. Потому что графики этих функций очень похожи графикам, описывающим ВАХ различных компонентов электрических цепей. Многие графики характеристик нелинейных элементов, имеющихся в литературе (Bessonov 1964), имеют такие же формы, которые представлены ниже, на рисунках 1 и 2, где приведены графики этих функций. На рисунке 1 представлены графики, когда ток с увеличением напряжения может стремиться к некоторому постоянному значению, а на рисунке

2 изображены графики функции, для которой увеличение аргумента (напряжения) приводит к неограниченному возрастанию значений функции (тока).

Эти функции зависят от единственного неизвестного параметра a , значение которого подлежит определению. Значения неизвестных параметров в предлагаемых функциях аппроксимации могут быть разными для разных компонентов электронной цепи. Для определения численных значений этих неизвестных параметров используются данные экспериментов и известный метод наименьших квадратов.

Кроме этого, причиной для выбора этих функций (3) и (4) в качестве аппроксимирующих является то обстоятельство, что для сравнительно небольших значений напряжения u (или аргумента x) должна выполняться линейная зависимость, т.е. закон Ома.

В самом деле, разложения этих функций в ряды Тейлора в окрестности $x = 0$ могут быть представлены в виде следующих степенных рядов:

$$a \cdot (1 - \exp(-\frac{x}{a})) = x - \frac{x^2}{2!a} + \frac{x^3}{3!a^2} - \dots + (-1)^k \cdot \frac{x^k}{k!a^{k-1}} + \dots$$

$$a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a} = x + \frac{x^3}{3!a^2} + \frac{x^5}{5!a^4} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!a^{2k-2}} + \dots$$

Если пренебречь малыми величинами, т.е. членами ряда, содержащими второй и выше степеней x , то сохранив в этих рядах только первые члены, можно получить формулу Ома с определенной точностью $y \approx x$ или $i = u/R$.

Для выяснения применимости этих функций в качестве аппроксимирующих функций зависимости между напряжением и током должны быть рассмотрены конкретные примеры. Примерами для определения аппроксимирующих функций должны быть эксперименты, проведенные для каждого вида элементов электронной цепи.

Математическая обработка результатов эксперимента осуществлена с помощью известного метода наименьших квадратов (МНК). Согласно этого метода, при условии выбора функцию $y = f(x, a, b, c, \dots)$ в качестве аппроксимирующей, требуется определить значения неизвестных параметров $a, b, c, \dots$. Для этого используется условие минимума следующей функции:

$$U(a, b, c, \dots) = \sum_{k=1}^n [y_k - f(x_k, a, b, c, \dots)]^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

Из курса математики известно (Kuralbayev&Yerzhan 2013), что необходимыми и достаточными условиями минимума данной квадратичной функции (6) будут равенства нулю первых ее частных производных:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial c} = 0; \dots \quad (6)$$

Из этих условий, в зависимости от вида выбранной функции аппроксимации, следует система алгебраических или трансцендентных уравнений относительно неизвестных параметров $a, b, c, \dots$. Поэтому задача аппроксимации экспериментальных данных сводится к решению системы алгебраических или трансцендентных уравнений.

Функции вида (3) и (4) в зависимости от параметра a могут иметь соответственно графики, показанные на рисунке 1 и 2.

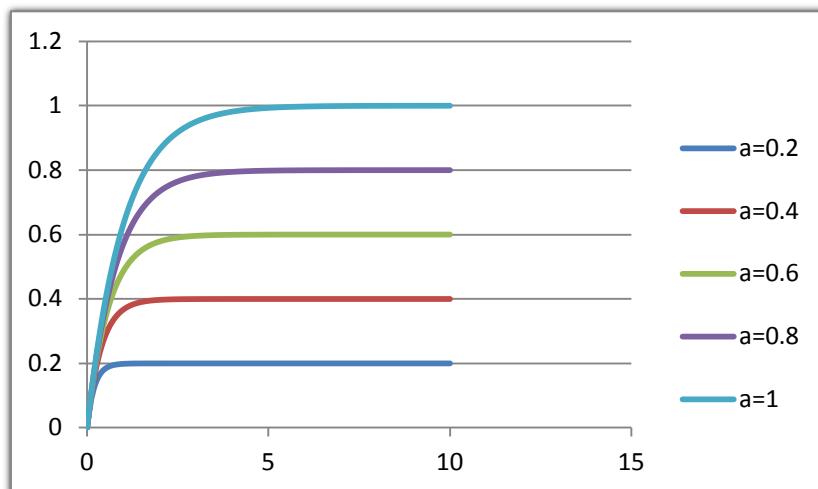


Рисунок 1 – Графики функции $y = a \cdot (1 - \exp(-\frac{x}{a}))$ для различных значений a

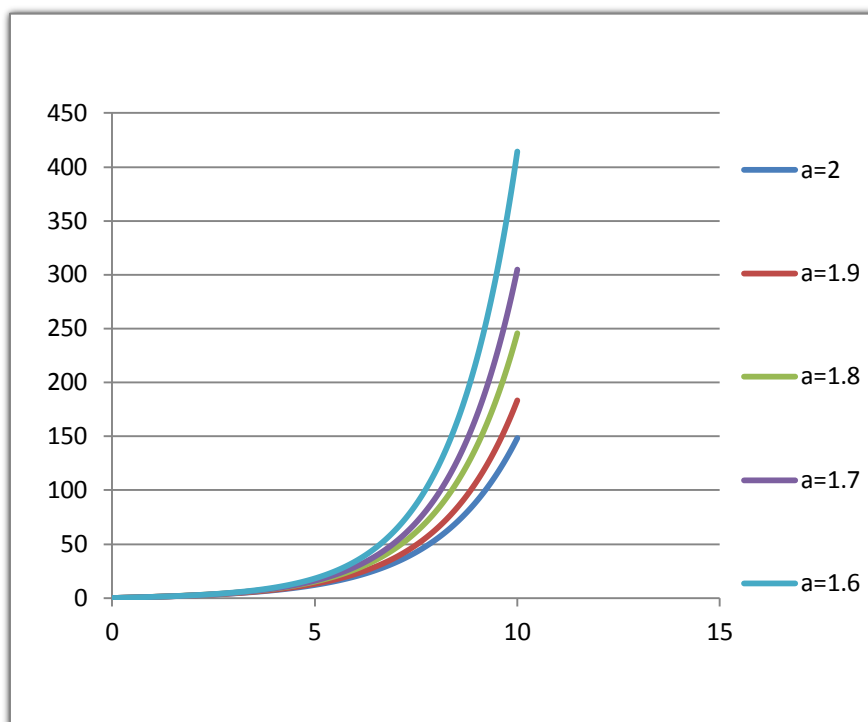


Рисунок 2 – Графики функции $y = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ для различных значений a

Теперь для определения конкретного вида аппроксимирующих функций необходимо использовать результаты экспериментов, проведенных для двух типов транзисторов.

1 АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЕВОГО ТРАНЗИСТОРА

Для полевого транзистора определены экспериментальные данные, приведенные в первых двух строках таблицы 1. Здесь рассматриваются две функции в качестве аппроксимирующих.

Таблица 1 – Экспериментальные данные и значения аппроксимирующих функций для полевого транзистора

x_k	0	0,10	0,25	0,50	1,00	2,00	5,00	10,00
y_k	0	0,12	0,20	0,32	0,35	0,38	0,42	0,46
$y = a(1 - e^{-\frac{x}{a}})$	0	0,09	0,19	0,29	0,38	0,41	0,42	0,42
$u = ax^2 + bx + c$	0,16	0,17	0,17	0,21	0,26	0,34	0,50	0,44

1.1 *Экспоненциальная аппроксимация.* Сперва в качестве аппроксимирующей функцией принята $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$. Для определения неизвестного параметра a в данной функции рассматривалось условие минимума следующей функции:

$$U(a) = \sum_{k=1}^n [y_k - a \cdot (1 - \exp(-\frac{x_k}{a}))]^2 \Rightarrow \min, \quad (7)$$

где x_k, y_k – экспериментальные данные, n – количество экспериментальных точек. Необходимым и достаточным условием минимума функции $U(a)$ является равенство нулю ее первой производной по a . Тогда первая производная функции (7) записывается в следующем виде:

$$\frac{dU}{da} = -2 \cdot \sum_{k=1}^n [y_k - a \cdot (1 - \exp(-\frac{x_k}{a}))] \cdot [1 - \exp(-\frac{x_k}{a}) - \frac{x_k}{a} \cdot \exp(-\frac{x_k}{a})] = 0. \quad (8)$$

Полученное уравнение (8) является трансцендентным относительно неизвестного параметра a , для решения которого использовался метод итераций. Точность вычисления искомого параметра a была задана, для которой условие для завершения итерационного процесса задано в виде следующего неравенства: $|a_{k+1} - a_k| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 0.0001$. В результате получено следующее значение параметра $a = 0,4187$.

Затем были вычислены значения аппроксимирующей функции $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$ для тех же значений аргумента (Таблица 1). Сравнение результатов показывает достаточную близость значений аппроксимирующей функции и экспериментальных данных. Это означает, что функция $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$ может быть использована в качестве аппроксимирующей функцией для характеристик нелинейных элементов. Это подтверждается также ее графическим представлением (Рисунок 3).

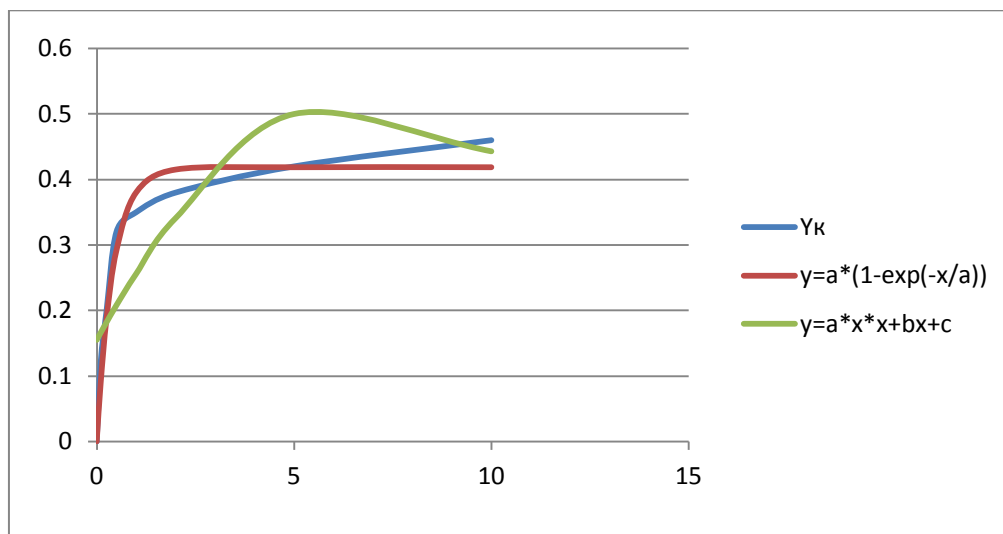


Рисунок 3 – Графики ВАХ полевого транзистора

1.2 *Квадратичная аппроксимация.* Если в качестве аппроксимирующей функции использовать квадратичную функцию $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, то будет получена система трех линейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных параметров a, b, c . Здесь рассматривается функция

$$U(a, b, c) = \sum_{k=1}^n [y_k - (a \cdot x_k^2 + b \cdot x_k + c)]^2 \rightarrow \min. \quad (9)$$

Необходимым и достаточным условием минимума данной функции (9) являются равенства нулю ее первых частных производных по неизвестным параметрам, которое приводит к системе алгебраических уравнений. Для решения данной системы уравнений был использован известный метод Жордана-Гаусса. Здесь в качестве исходных данных использовались экспериментальные данные, приведенные в первых двух строках таблицы 1. В результате выполнения данной программы были получены значения параметров: $a = -0,0080$, $b = 0,1092$, $c = 0,1543$.

Значения квадратичной функции $y = -0,008 \cdot x^2 + 0,1092 \cdot x + 0,1543$ приведены в четвертой строке таблицы 1. Сравнение значений данной функции с экспериментальными данными показало достаточно хорошее их совпадение (Рисунок 3).

2. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК БИПОЛЯРНОГО ТРАНЗИСТОРА

Для биполярного транзистора были проведены эксперименты, результаты которых приведены в таблице 2. Для этого случая была решена задача аппроксимации, где также был использован метод наименьших квадратов.

Таблица 2 – Экспериментальные данные и значения аппроксимирующих функций для биполярного транзистора

x_k	0	1,02	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	11,00
y_k	0	0,70	0,74	0,77	0,80	0,83	0,86	0,88	0,91	0,99
$u = a \cdot (1 - e^{-\frac{x}{a}})$	0	0,60	0,78	0,84	0,86	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87
$v = ax^2 + bx + c$	0,30	0,46	0,59	0,70	0,80	0,87	0,92	0,96	0,98	0,90

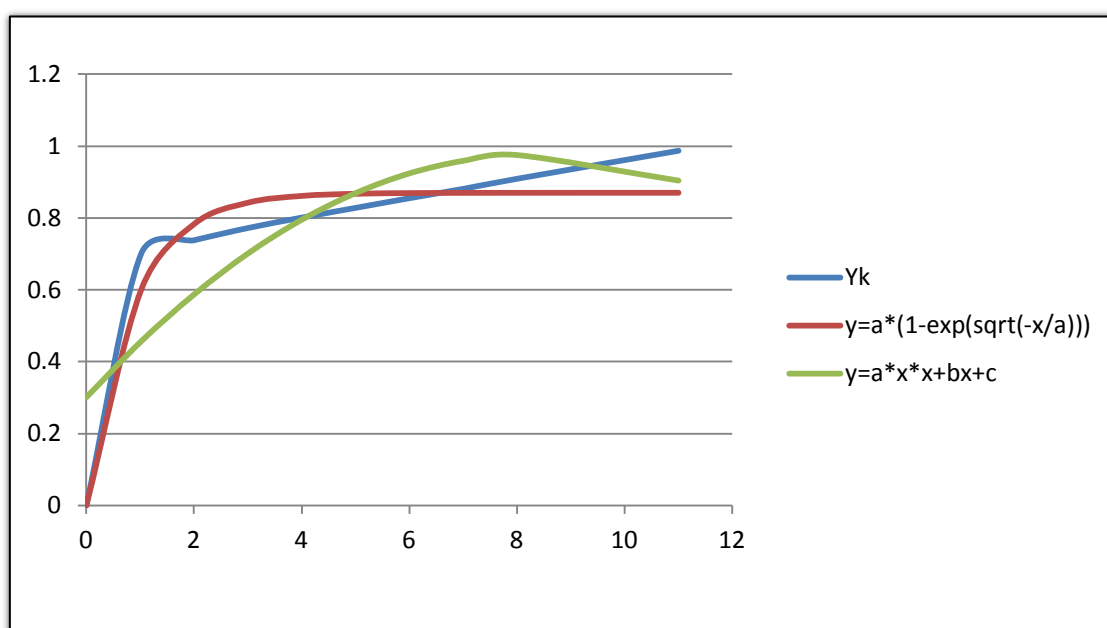


Рисунок 4 – Графики ВАХ биполярного транзистора

Результаты решения данной задачи приведены на рисунке 4, где приведены такие же графики по экспериментальным данным и графики аппроксимирующих функций для данного случая. В данном случае методом наименьших квадратов найдены значения неизвестных параметров:

- для функции $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$ значение параметра $a = 0.8701$;

- для функции $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ значения параметров $a = -0.0098$; $b = 0.1627$, $c = 0.3007$.

3. ПРИМЕР ДЛЯ РЕЗИСТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА

Первые две строки таблицы 3 содержат экспериментальные данные, приведенные в учебнике (Bakalov & DMITRACOV & Kruk 2000). В качестве аппроксимирующей функции использован гиперболический синус $y = a \cdot \text{sh}(x/a)$. Использование метода наименьших квадратов привело к трансцендентному уравнению относительно параметра a . Решение этого уравнения методом

итераций позволило найти значение параметра $a = 2,9445$. Затем были вычислены значения функции $y = a \cdot sh(x/a)$, которые записаны в третьей строке таблицы 3, а графики приведены на рисунке 5.

Таблица 3 – Значения тока и напряжения в резистивном элементе (Bakalov & Dmitracov & Kruk 2000)

u	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
i	0,0	0,06	0,23	0,50	0,85	1,18	1,65	2,30	2,90
$y = a \cdot sh(x/a)$	0,0	0,30	0,59	0,90	1,21	1,54	1,88	2,24	2,62

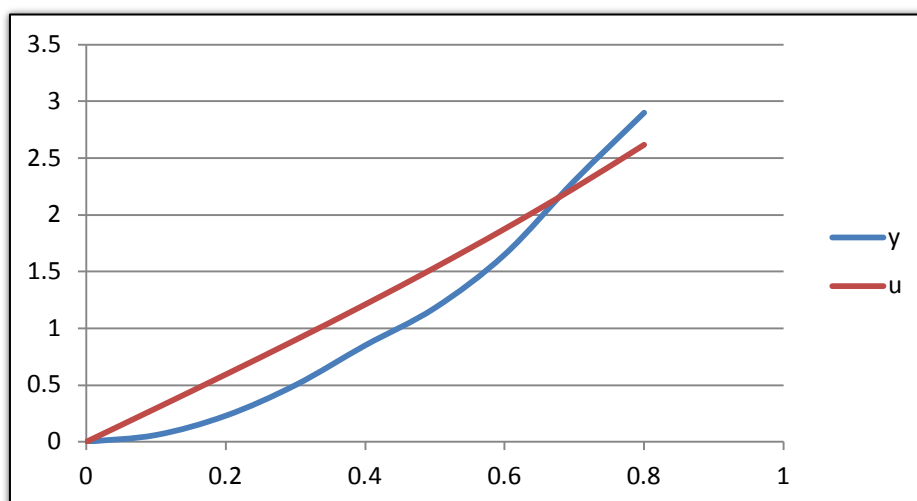


Рисунок 5 – Графики ВАХ нелинейного резистивного элемента (Bakalov & Dmitracov & Kruk 2000)

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПЬ

После того как был проведен анализ различных видов аппроксимирующих функций, используемых для аналитического описания зависимости между током и напряжением, целесообразно рассматривать задачу анализа электрической цепи, имеющей в своем составе нелинейный элемент. Для этого нет необходимости рассматривать сложную схему, достаточно рассматривать электрическую схему с одним нелинейным элементом.

Пусть рассматривается следующая простая схема:

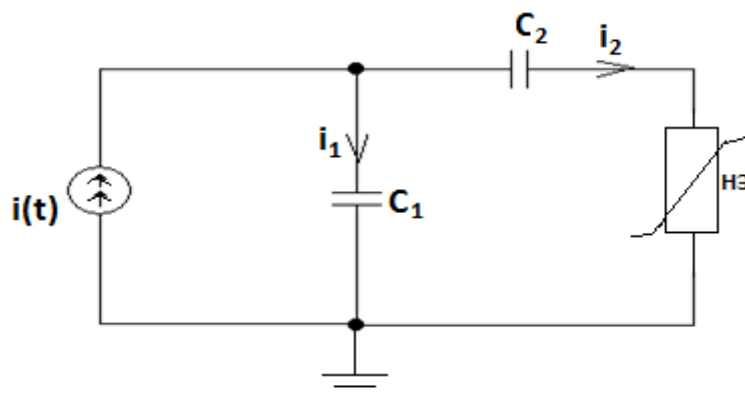


Рисунок 5 – Электрическая схема с нелинейным элементом

Данная схема с линейным элементом была рассмотрена в работах (Kuralbayev&Yerzhan 2012, Kuralbayev&Yerzhan 2013) авторов, в которых была получена ее математическая модель, поставлена и решена математическая задача – задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений. В данном случае вместо линейного элемента рассматривается нелинейный элемент (НЭ).

5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Методика составления уравнений состояния цепи на основе законов Кирхгофа остается такой же, как и в случае линейных резистивных цепей (Bakalov & Dmित्रacov & Kruk 2000). Однако процесс решения полученной системы, которая содержит нелинейное уравнение, может существенно затрудниться. Для большинства относительно сложных цепей аналитического решения систем уравнений может и не существовать. Тогда приходится прибегать к численным методам решения.

Для составления математической модели данной электрической схемы (Рисунок 5) вводятся следующие обозначения: i_1, i_2 – токи, $u_1, u_2, u_{НЭ}$ – напряжения, C_1, C_2 – емкости конденсаторов, τ – время. Здесь C_1 и C_2 считаются постоянными величинами.

По законам Кирхгофа для рассматриваемой схемы справедливы следующие формулы: $i_1 + i_2 = i(\tau)$, $u_1 = u_2 + u_{НЭ}$. При последовательном соединении конденсатора C_2 и НЭ ток остается равным, т.е. $i_2 = i_{НЭ}$.

Уравнения, определяющие зависимости тока и напряжения для конденсаторов, записываются в виде следующих формул: а) для первого конденсатора $i_1 = C_1 \cdot \frac{du_1}{d\tau}$; б) для второго конденсатора

$$i_2 = C_2 \cdot \frac{du_2}{d\tau}.$$

Пусть для аппроксимации ВАХ нелинейного элемента (НЭ) используется следующее выражение $i_{НЭ} = \frac{U_0}{R} \cdot f(x)$, где $x = \frac{u_{НЭ}}{U_0}$ – безразмерное напряжение, $f(x)$ – аппроксимирующая

функция зависимости между током и напряжением в нелинейном элементе. В отличие от задачи, рассмотренной в (Kuralbayev&Yerzhan 2013), вместо линейного элемента с постоянным сопротивлением R в данной задаче используется нелинейный элемент. Причем, напряжение в нелинейном элементе определяется по формуле $u_{HЭ} = x \cdot U_0$.

Если $i_{HЭ} = i_2$, то для рассматриваемой схемы могут быть записаны следующие уравнения:

$$\begin{cases} i_2 = C_2 \cdot \frac{du_2}{dt}; & i_1 = C_1 \cdot \frac{du_1}{dt}; \\ i_1 + i_2 = i(t); & u_{HЭ} = u_1 - u_2; \\ i_2 = \frac{U_0}{R} \cdot f(x) \end{cases}$$

В данной системе пяти уравнений; неизвестными являются пять величин $i_1, i_2, u_1, u_2, u_{HЭ}$. Эти пять формул являются уравнениями для определения пяти неизвестных параметров данной электрической схемы.

Для удобства в расчетах целесообразно использовать безразмерные параметры. Для этого используются характерные величины, введенные в формулах (1): U_0 - напряжение, $\frac{U_0}{R}$ - ток.

Производится следующая замена переменных:

$$i_2 = y_2 \cdot \frac{U_0}{R}; \quad i = z \cdot \frac{U_0}{R}; \quad i_1 = y_1 \cdot \frac{U_0}{R}; \quad x_1 = \frac{u_1}{U_0}; \quad x_2 = \frac{u_2}{U_0}; \quad x = \frac{u_{HЭ}}{U_0}; \quad t = \frac{\tau}{T}.$$

Здесь x, x_1, x_2, y_1, y_2, t – безразмерные величины.

Если будут найдены u_1 и u_2 , то легко определяется $u_{HЭ}$; поэтому достаточно решить систему следующих четырех уравнений относительно четырех неизвестных функций x_1, x_2, y_1, y_2 :

$$y_1 = \alpha_1 \cdot \frac{dx_1}{dt}; \quad y_2 = \alpha_2 \cdot \frac{dx_2}{dt}, \quad y_1 + y_2 = z(t); \quad y_2 = f(x). \quad (6)$$

Здесь по формуле $x = x_1 - x_2$ определяется безразмерное значение напряжения в нелинейном элементе; постоянные $\alpha_1 = \frac{RC_1}{T}$ и $\alpha_2 = \frac{RC_2}{T}$ являются безразмерными величинами; RC_1 и RC_2 - постоянные времени.

Итак, получена следующая система дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t), x_1(t), x_2(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} \cdot f(x) = \frac{1}{\alpha_1} \cdot z(t); \\ \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\alpha_1} \cdot [z(t) - f(x)]; \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{\alpha_2} \cdot f(x) \end{cases} \quad (7)$$

Дифференциальные уравнения, входящие в данную систему, содержат функцию $f(x)$, которая является нелинейной относительно $x(t)$. Поэтому система уравнений (7) рассматривается как нелинейная.

Для рассматриваемой здесь электронной цепи предполагается, что в начальный момент времени отсутствовал ток (напряжение), поэтому для решения данной системы дифференциальных уравнений (7) приняты следующие начальные условия:

$$x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0; \quad x(0) = 0; \quad (8)$$

Теперь можно сформулировать следующую *постановку математической задачи*: требуется найти такие значения искомых функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x(t)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (7) и начальным условиям (8). Решение данной системы ищется в промежутке $t \in [0, 1]$. В связи с тем, что существует формула $x = x_1 - x_2$, связывающая этих трех функций, можно вначале ограничиваться решением двух дифференциальных уравнений, второго и третьего уравнений системы (7).

Если будут найдены значения безразмерных функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x(t)$, определяющих напряжения, то безразмерные величины, определяющие токи $y_1(t)$ и $y_2(t)$, будут найдены из формул (6):

$$y_2 = f(x), \quad y_1 = z - y_2. \quad (9)$$

6. МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Математическая задача (7)-(8) является задачей Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных. Для решения данной задачи невозможно использовать существующие аналитические методы из-за присутствия в уравнениях нелинейной функции, поэтому используется численный метод решения задачи. В качестве численного метода может быть выбран метод Эйлера.

Согласно этого метода, вначале выбирается шаг по независимой переменной t : $\delta = 0.0001$, а затем осуществляется замена производных конечно-разностными соотношениями:

$$\frac{dx_1}{dt} \approx \frac{x_{1i+1} - x_{1i}}{\delta}; \quad \frac{dx_2}{dt} \approx \frac{x_{2i+1} - x_{2i}}{\delta}. \quad (10)$$

Здесь $x_{1i} = x_1(t_i)$, $x_{2i} = x_2(t_i)$, $t_i = \delta \cdot i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $n = \frac{1}{\delta}$ – количество шагов по независимой переменной t .

Используя замену (10), из второго и третьего уравнений (7), можно получить следующие формулы для определения дискретных значений искомых функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$x_{1i+1} = \frac{\delta}{\alpha_1} \cdot [f(x_i) - z(t_i)], \quad x_{2i+1} = \frac{\delta}{\alpha_2} \cdot f(x_i), \quad (11)$$

где $x_i = x(t_i)$ – значение функции $x(t)$ при $t = t_i$. Эти формулы справедливы для значений параметра $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Из начальных условий (8) следует, что

$$t_0 = 0, \quad x_{10} = 0, \quad x_{20} = 0. \quad (12)$$

7. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решение поставленной задачи анализа нелинейных радиотехнических цепей состоит из следующих составных частей:

- вначале рассматривается проблема аппроксимации нелинейных зависимостей между током и напряжением, в результате решения которой необходимо выбрать аппроксимирующие функции;

- затем использовать выбранные функции для описания этих зависимостей при решении математических задач, возникающих при моделировании процесса в цепи.

Для разработки алгоритма решения математической задачи вводятся следующие обозначения:

$x_{1i} = p_1$, $x_{1i+1} = p$, $x_{2i} = q_1$, $x_{2i+1} = q$. Тогда формулы (11) будут записаны в следующем виде:

$$p = p_1 + \delta \cdot (f(x) - z(x)) / \alpha_1; \quad q = q_1 + \delta \cdot f(x) / \alpha_2; \quad (13)$$

Расчетная схема для решения математической задачи (7)-(8) будет состоять из следующих этапов:

1⁰ Начальные условия: $t = 0$, $p = 0$, $q = 0$.

2⁰ Начало цикла $i = 1$.

3⁰ Определение предыдущих значений функций $p_1 = p$, $q_1 = q$.

4⁰ Вычисление следующих значений функций по формулам (13).

5⁰ Вычисление значений функции $x(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$.

6⁰ Вывод результатов решения задачи.

7⁰ Переход к следующему номеру по i .

8⁰ Если $i \leq n$, то осуществляется переход к пункту 3⁰.

Данный алгоритм решения задачи составлен для любого вида функций $f(x)$ и $z(t)$. Ниже будут рассмотрены частные случаи, когда будут заданы конкретные виды этих функций. Из анализа различных видов функций можно утверждать, что для аппроксимации вольт-амперных характеристик элементов электронной цепи могут быть использованы: квадратичная функция $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, экспоненциальная функция $y = a \cdot (1 - \exp(-x/a))$ и другие. Каждый раз, при использовании нелинейного элемента, необходимо провести эксперименты и по данным эксперимента определить аппроксимирующую функцию. Здесь будут рассмотрены частные случаи, в которых для анализа электронной цепи используются аппроксимирующие функции, рассмотренные выше.

8. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ, КОГДА В КАЧЕСТВЕ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПРИНЯТА ФУНКЦИЯ $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Анализ различных видов аппроксимирующих функций показал, что для любого вида вольт-амперных характеристик можно использовать квадратичную функцию $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Поэтому для рассматриваемого частного случая используется эта функция для описания зависимости тока от напряжения в нелинейном элементе. Для конкретных вычислений приняты

параметры примера, рассмотренного для биполярного транзистора, когда коэффициенты аппроксимирующей функции имеют следующие значения: $a = -0,0098$, $b = 0,1627$, $c = 0,3007$.

Здесь источник тока считается переменной и изменение тока задано в виде синусоиды: $z(t) = \sin(2\pi f t)$, где частота $f = 50$ Гц. Приняты следующие значения постоянных параметров: $C_1 = 3$ МкФ, $C_2 = 1,5$ МкФ, $R = 10$ кОм, $T = 0,1$ сек. Поэтому безразмерные параметры будут определены в виде: $\alpha_1 = 0,3$; $\alpha_2 = 0,15$.

Результаты решения системы дифференциальных уравнений представлены в виде графиков безразмерных функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_{нз}(t)$, описывающих изменения напряжений (Рисунок 7) и функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z(t)$, описывающих изменения токов (Рисунок 8).

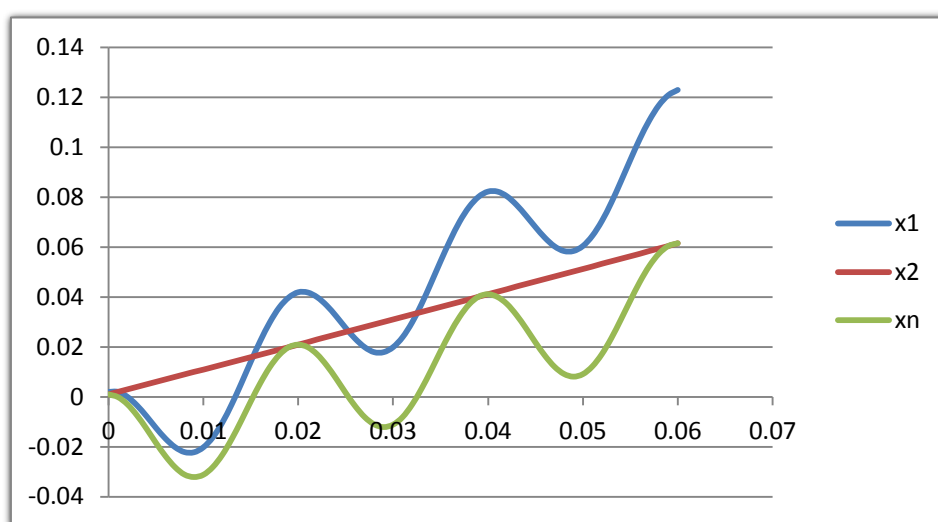


Рисунок 7 – Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_{нз}(t)$

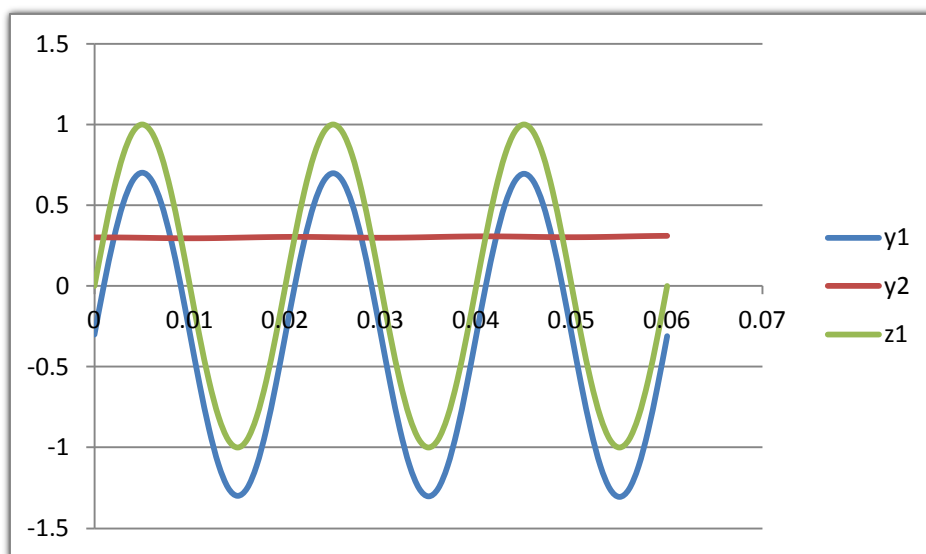


Рисунок 8 – Графики функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z(t)$

Из анализа этих результатов можно сделать следующие выводы:

1. Для рассмотренного биполярного транзистора напряжения x_1, x_2 имеют периодический характер с возрастающим значением с течением времени t ; их графики совпадают по фазе и имеют смещение по фазе на $T/2$ в сравнении с возмущающим переменным током $z(t)$.
2. Напряжение $x_2(t)$ возрастает монотонно, его график проходит по максимальным точкам графика $x_n(t)$.
3. Значение тока $y_2(t)$ меняется слабо с течением времени, а амплитуда тока $y_1(t)$ отличается от амплитуды возмущающего переменного тока $z(t)$ почти на постоянную величину и их графики совпадают по фазе.

9. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ, КОГДА В КАЧЕСТВЕ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПРИНЯТА ФУНКЦИЯ $y = a \cdot (1 - e^{-\frac{x}{a}})$.

В данном случае использованы те же данные о параметрах электронной схемы. Для описания нелинейного элемента использована аппроксимирующая функция $y = a \cdot (1 - e^{-\frac{x}{a}})$. По данным, приведенным в таблице 2, получено значение параметра $a = 0,8701$. При тех же условиях, которые были рассмотрены в первом частном случае, для данного случая получены следующие результаты, графические представления которых показаны на рисунках 11 и 12.

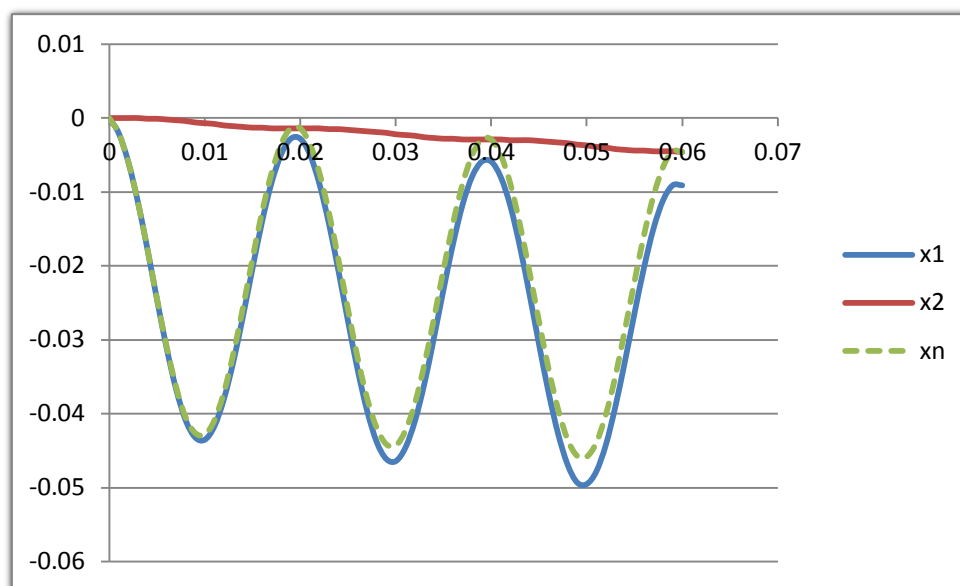


Рисунок 11 - Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_n(t)$

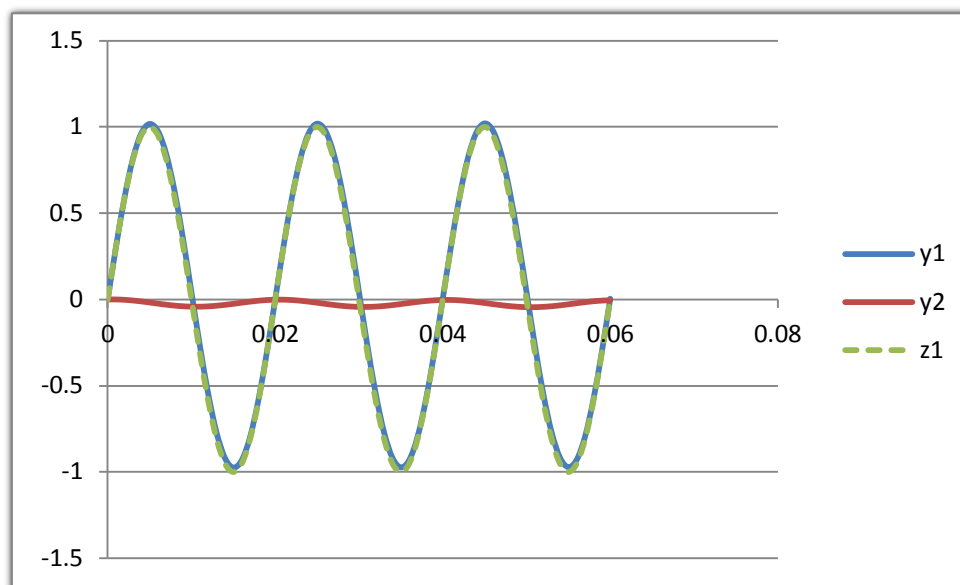


Рисунок 12 – Графики функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z(t)$

Анализ результатов решения задачи для данного случая показал:

1. Значения напряжений $x_1(t)$, $x_{нз}(t)$ практически мало отличаются друг от друга, их графики смещены на полпериода в сравнении с графиком тока $z(t)$. Причем, их графики смещаются вниз. Напряжение $x_2(t)$ и ток $y_2(t)$ уменьшаются с течением времени с некоторым колебанием.
2. Графики токов $y_1(t)$ и $z(t)$ практически совпадают, $y_2(t)$ имеет колебательный характер, график имеет смещение на полпериода в сравнении с током $z(t)$.

10. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ, КОГДА В КАЧЕСТВЕ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПРИНЯТА ФУНКЦИЯ $y = a \cdot sh(x/a)$.

В данном случае использованы те же постоянные параметры элементов цепи, рассмотренные в предыдущем частном случае, кроме параметров нелинейного элемента. Для описания ВАХ нелинейного элемента использована аппроксимирующая функция $y = a \cdot sh(x/a)$. Результаты решения системы дифференциальных уравнений (7), полученные для значения параметра $a = 2,9445$, представлены в виде графиков на рисунках 9 и 10.

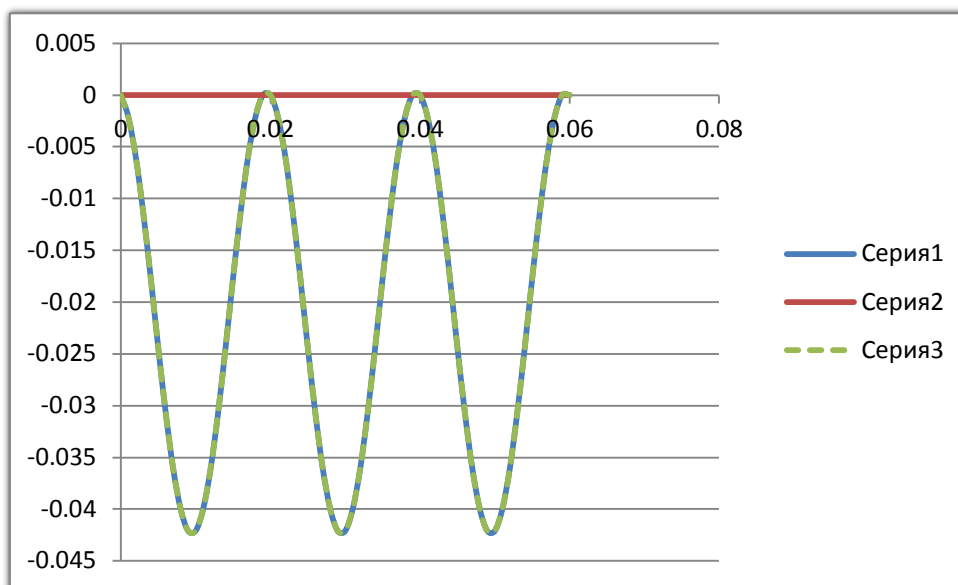


Рисунок 9 - Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_{n2}(t)$

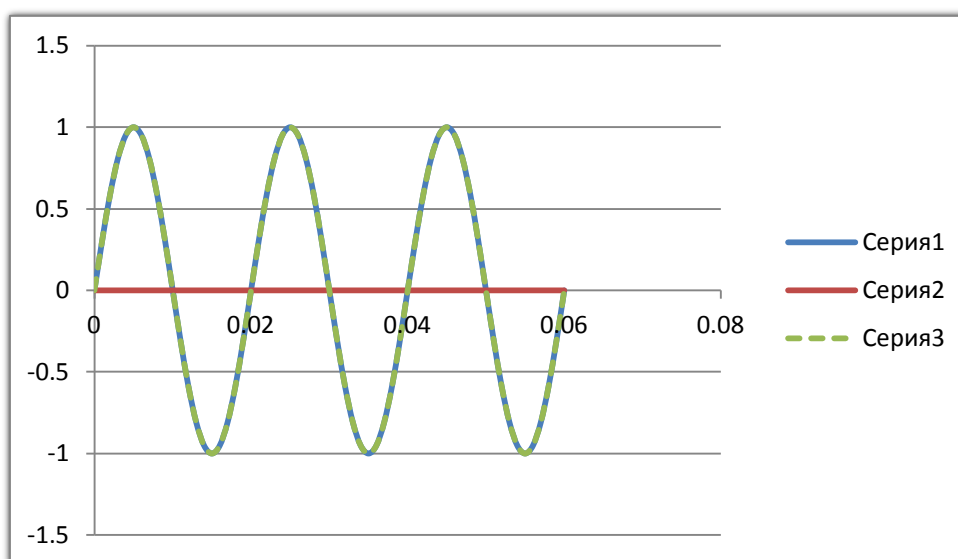


Рисунок 10 - Графики функций $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z(t)$

Анализ результатов решения задачи для данного случая показал, что значения напряжений $x_1(t)$ и $x_n(t)$ совпадают и их графики имеют смещение по фазе $\frac{T}{2}$ в сравнении с возмущающим переменным током $z(t)$; напряжение и ток $y_2(t)$ практически остаются равными нулю. Здесь необходим дополнительный анализ для исследования возможности использования в качестве аппроксимирующей функции экспериментальных данных гиперболического синуса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования, результаты которых изложены в данной статье, охватывают две важные проблемы: а) анализ и выбор видов функций, используемых для аппроксимации экспериментальных данных; б) решение математических задач, возникающих в результате математического моделирования процессов в нелинейной электронной цепи. Анализ рассмотренных в данной статье способов аппроксимации экспериментальных данных показал,

что предлагаемые для аппроксимации функции $y = a \cdot (1 - e^{-\frac{x}{a}})$ и $y = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ достаточно близко

описывают экспериментальные данные и могут быть использованы в определенных условиях для описания функциональной зависимости между током и напряжением. Кроме этого, сравнительный анализ показал, что значения квадратичной и экспоненциальной функций достаточно близки к экспериментальным значениям. Это позволяет сделать вывод о том, что рассмотренные здесь функции могут быть использованы в качестве аппроксимирующих функций с достаточно хорошим приближением.

Использование этих функций, параметры которых были получены из математической обработки экспериментальных данных, для конкретного нелинейного элемента электронной цепи позволило определить изменение токов и напряжений в ее компонентах. Решение и анализ частных случаев математической задачи с использованием этих функций позволили сделать определенные выводы о характере компонентов цепи.

ЛИТЕРАТУРА

Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.Е. Основы теории цепей: Учебник для вузов. Под ред. В.П. Бакалова. – 2-е изд. перераб. и доп. М.: Радио и связь, 2000. 592 с.

Бессонов Л.А. Нелинейные электрические цепи. – М.: Высшая школа. 1964. – 430 с.

Куралбаев З.К., Ержан А.А. // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. 2012. №6 (91). С. 183-188.

Куралбаев З.К., Ержан А.А. // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. №1(287). С.27-31.

Фидлер Дж.К., Найтингейл К. Машинное проектирование электронных схем: Пер. с англ. Под ред. Г.Г. Казеннова. М.: Высш. шк., 1985. 216 с.

Bakalov V.P., Dmitracov V.F., Kruk B.E. Radio and communication, 2000, 592 (in Russ).

Bessonov L.A. Nonlinear electric circuits. – M.: High school. 1964. – 430 с (in Russ).

Kuralbayev Z.K., Yerzhan A.A. // Vestnik ENU im. L.N. Gumilyeva. – 2012, №6 (91). 183-188 (in Russ).

Kuralbayev Z.K., Yerzhan A.A. // Izvestiya NAN RK. – 2013, №1(287). 183-188 (in Russ).

Fidler J.K., Nightingate C. Computer aided circuit design. 1985, 216 (in Russ).