Journal of International Scientific Publications:
Materials, Methods & Technologies, Volume 7, Part 3
ISSN 1313-2539, Published at: http://www.scientific-publications.net

METHOD OF FULL DISCRETIZATION IN ENGINEERING UNDER CREEP CONDITIONS

Tanya N. Ter-Emmanuilyan, Igor O. Polumordvinov

Kazakh-British Technical University, 050000, Tole bi Street, 59, Almaty, Republic of Kazakhstan

Abstract

Method of Full Discretization (FDM) is a special modification of the finite element method (FEM) for the solving of various problems of the elastic creep.

FDM is a universal, comparatively simple and obvious engineering method being "not step-by-step" in time. It gives an opportunity to determine discrete values of displacements, deformations and stresses in a calculated interval of time. The method is developed both in variant of displacements, and in variant of forces. It can be combined with other engineering numerical methods, such as a method of boundary elements, a method of finite differences and others.

The method is applied at the decision of a wide class of engineering problems of a linear and nonlinear elastic creep. For example, a calculation in time of a four-level ferro-concrete construction and its basis, etc.

Key words: *Method of Full Discretization, elastic creep, displacements, deformations, stresses, ferro-concrete construction*

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод полной дискретизации (МПД) – специальная модификация метода конечных элементов (МКЭ) для решения различных задач упругоползучести (Тер-Эммануильян Н.Я. 1975).

МПД – универсальный, сравнительно простой, алгоритмичный и наглядный инженерный метод, являющийся нешаговым во времени. Он дает возможность определять дискретные значения перемещений, деформаций и напряжений в расчетном отрезке времени. Метод разработан как в варианте метода перемещений, так и в варианте метода сил. Его можно комбинировать с другими инженерными численными методами, такими как метод граничных элементов (МГЭ), метод конечных разностей (МКР) и другими.

МПД позволяет учитывать: неоднородную ползучесть и старение материалов конструкций любых сооружений и грунтов основания; физическую и геометрическую нелинейность; пластичность; анизотропию; разномодульную упругоползучесть; влияние температуры; наличие преднапряженной или непреднапряженной арматуры в железобетоне; дискретные графики возведения сооружений (увеличение или уменьшение объемов, изменение эксплуатационных нагрузок и т.д.).

Метод применяется при решении широкого класса инженерных задач линейной и нелинейной упругоползучести. К ним относятся: плоские; осесимметричные; пространственные; однослойные и многослойные пластины и оболочки; стержневые и тонкостенные системы; устойчивость пластин и стержней; контактные задачи; задачи термоупругопластичности; кратковременной высокотемпературной ползучести металлов др.

С помощью МПД решен широкий класс модельных и прикладных инженерных задач: расчет эволюции напряженно-деформированного состояния в неоднородной системе: обделка туннеля – горная порода; железобетонная труба – грунтовая засыпка; неоднородная толстостенная оболочка со стальной облицовкой при нагружении и разгрузке; исследование эволюции напряжено-деформированного состояния при проходке с заданной скоростью вертикальной подкрепленной шахты; расчет во времени реальных стеновых железобетонных панелей с отверстиями; расчет многослойных пластин с учетом ползучести некоторых слоев; о выпучивании гибких пластин; продольный изгиб стержня и цилиндрической пластины с начальной погибью; исследование на модели Шенли при консервативной и следящей нагрузках; расчет предварительно напряженных железобетонных стержней со стальной арматурой;

Кроме того, выполнены совместные расчеты растущих зданий и сооружений и их основания: об эволюции напряженно-деформированного состояния фундаментной железобетонной плиты на грунтовом основании; задача об учете влияния неодновременности возведения зданий на эволюцию НДС в конструкциях и основании при стесненной застройке городских территорий; расчеты коробчатого фундамента и основания высотной телевизионной башни (РТПС) на горе Кок-Тюбе вблизи Алматы в трех вариантах постановки задачи: плоской, квазипространственной и пространственной; расчет дорожной насыпи и ее основания; расчет во времени четырехъярусного железобетонного сооружения и его основания (на примере модельной задачи) и т.д.

2. МЕТОД РАСЧЕТА

Напряженно-деформированное состояние (НДС) упругоползучего однородного и изотропного тела, нагруженного в возрасте $t=t_1$ при малых деформациях в статических задачах полностью определено, если известны все 15 компонентов вектора

$$\bar{f}\left(x^i,t,\tau\right)=[\bar{u}^T\left(x^i,t,\tau\right)\bar{\varepsilon}^T\left(x^i,t,\tau\right)\bar{\sigma}^T\left(x^i,t,\tau\right)],\quad (i=1,2,3),$$

как функции координат и времени, удовлетворяющих в каждой точке системе матрично-векторных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\underline{n}^T & \underline{J} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{J} & -\underline{L}_t \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{\varepsilon} \\ \bar{\sigma} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{\rho} \end{pmatrix}=\bar{0} \qquad (1)$$

и граничным условиям в перемещениях на S_1 и в поверхностных силах на S_2. В системе (1) $\underline{n}$ *[3×6]* – матрица линейных дифференциальных операторов по координатам $\bar{\rho}=\left[XYZ\right]^T$; – вектор объемных сил; $\underline{n}_s$ – матрица направляющих косинусов внешней нормали к поверхности, но с заменой операторов дифференцирования $\partial/\partial x^i,\mathrm{K}$ на косинусы $\cos\left(\bar{\nu},x^i\right),\mathrm{K}$; $\underline{J}$ –

единичная матрица; $\underset{6\times6}{\underline{L}_t}$ – матрица интегро-дифференциальных операторов упругоползучести с 12 ненулевыми элементами L_{ij}, из которых $\underline{L}_{t11}$ имеет следующий вид:

$$L_{t11} = \frac{1}{E(\tau_1)} + C(t,\tau_1) + \int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau)\right]\frac{d\mathrm{K}}{d\tau} = \delta(t,\tau_1) + \int_{\tau_1}^{t}\delta(t,\tau)\frac{d\mathrm{K}}{d\tau}$$

Матрица $\underline{L}_t$ в обычных обозначениях построена на основании уравнений состояния для линейного трехмерного упругоползучего тела, полученных Н.Х.Арутюняном.

Для решения системы уравнений (1) был выбран численный метод решения, основанный на полной, пространственно-временной дискретизации (МПД). Дискретизация объектов в МПД по геометрии осуществляется как и в МКЭ при решении упругих и упругопластических задач. Ограниченный временной отрезок (сутки, годы) дискретизируется *p* временными точками.

Для одноосного напряженного состояния дискретная форма уравнения состояния имеет вид:

$$\varepsilon_i = \sigma_i\delta_{i1} + \sum_{j=2}^{i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\delta_i(\tau)d\tau, \quad (i = 1,2,3,\mathrm{K}\ ,p), (j = 2,3,\mathrm{K}\ ,p). \qquad (2)$$

Интеграл (2) разбит на сумму интегралов, а производная заменена разностной.

Соотношение (2), после введения матричных ограничений, приобретает вид, совпадающий по форме с законом Гука:

$$\bar{\varepsilon} = \underline{E}^{-1}\cdot\bar{\sigma},$$

– где $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\sigma}$ – векторы дискретных значений.

$$\underset{p\times p}{\underline{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & 0 & \mathrm{K} & 0 \\ \delta_{21}-\tilde{\delta}_{22} & \tilde{\delta}_{22} & \mathrm{K} & 0 \\ \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} \\ \delta_{p1}-\tilde{\delta}_{p2} & \tilde{\delta}_{p2}-\tilde{\delta}_{p3} & \mathrm{K} & \tilde{\delta}_{pp} \end{pmatrix}$$

– обратная квадратно-нижняя треугольная матрица матричного «модуля» $\underline{E}$, характеризующая упругость, наследственную ползучесть и старение материала, в которой величины вычисляются по формуле

ISSN 1313-2539, Published at: http://www.scientific-publications.net

$$\tilde{\delta}_{ik} = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \delta_i(\tau) d\tau,$$

при этом

$$\delta(t,\tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t,\tau).$$

В общем случае трехосного НДС, из шести скалярных интегральных уравнений состояния, составляющих вторую группу матричных уравнений (1) получена, после дискретизации по времени, система алгебраических уравнений, имеющая форму обобщенного закона Гука:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_x = \underline{E}^{-1}\bar{\sigma}_x - \underline{\mu}\underline{E}^{-1}\left(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z\right) \\ \mathrm{K}\quad\mathrm{K}\quad\mathrm{K}\quad\mathrm{K}\quad\mathrm{K}\quad\mathrm{K} \\ \bar{\gamma}_{xy} = 2\underline{E}^{-1}\left(\underline{J} + \underline{\mu}\right)\bar{\tau}_{xy} \\ \mathrm{K}\quad\mathrm{K}\quad\mathrm{K}\quad\mathrm{K}\quad\mathrm{K}\quad\mathrm{K} \end{array}\right\},$$

– где $\underline{\mu}=\underline{\upsilon}\cdot\underline{\Pi}$ и, в свою очередь

$$\underline{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{K} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{K} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \mathrm{K} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \mathrm{K} & 0 \\ \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

– вспомогательная матрица,

υ – нижняя треугольная матрица, сформированная из величин υ_{ij}:

$$\nu_{ij} = \begin{cases} \nu(t_i,\tau_j), & (i \le j) \\ 0, & (i < j) \end{cases}, \qquad \nu(t,\tau) = \frac{\tilde{\varepsilon}(t,\tau)}{\varepsilon_0(\tau)}.$$

При построении матриц $\underline{E}$ и $\underline{\mu}$ можно использовать теории ползучести или данные базовых экспериментов. В результате обобщения физических соотношений линейной теории ползучести и матричного «закона Гука» (3), получена в общем виде матричная форма закона линейной упругоползучести:

$$\overline{\sigma}_t = \underline{D}_t \overline{\varepsilon}_t, \qquad (3)$$

– D_t – обобщенная матрица линейной упругоползучести, имеющая в скалярах 6p-й порядок, $\overline{\sigma}_t$ и $\overline{\varepsilon}_t$ – 6p-мерные (*3p*-мерные в плоских задачах) по компонентам тензоров и временным точкам векторов напряжений и деформаций.

При выводе формулы вычисление обобщенной во времени матрицы жесткости конечного элемента для квазистатических задач упругоползучести использован принцип возможных перемещений Лагранжа. В результате получена формула:

$$\underline{k}_t^r = \int_V \underline{B}_1^T \underline{D}_t \underline{B}_1 dv,$$

– где $\underline{B}_1$ – матрица связи компонентов перемещений и деформаций во времени в КЭ:

$$\overline{\varepsilon}_t^r = \underline{B}_1 \overline{q}_t^r.$$

Имеет вид прямоугольной матрицы в общем случае порядка 6p×3np (n – число узлов в КЭ).

Матрица $\underline{B}_1$ получается из обычной матрицы $\underline{B}$ путем развертывания каждого скалярного члена $\underline{B}_{k\ell}$ в диагональные блок-матрицы порядка p с постоянными диагональными элементами $\underline{B}_{k\ell}$.

Обобщенная во времени матрица жесткости упругоползучего конечного элемента имеет порядок в ***p*** раз больший, чем порядок $\boldsymbol{k_r}$ – матрицы жесткости упругого элемента за счет замены скалярных упругих констант E и υ нижними треугольными матрицами ***E*** и $\boldsymbol{\mu}$ порядка ***p***. Далее приводится обобщенная матрица жесткости $\underline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{t}}$ системы упругоползучих элементов, которая является квадратной, блочной, порядка, в общем случае, ***3Np (N*** – общее число узлов элементов системы).

$$K_t' \cdot \overline{q_t} = \overline{R_t}$$

3. РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В строительной практике возведение любых сооружений является примером растущих во времени тел. Под растущими телами, которые называются также наращиваемыми, понимаются

тела, масса и конфигурация которых изменяется в процессе загружения за счет присоединения к их поверхности дополнительных объемов материала (Арутюнян, Н.Х., Дроздов, А.Д. и Наумов В.Э. 1987). В общем случае возможно и частичное удаление массы и объема материала. Аналитическим изучением этих процессов занимается механика растущих вязкоупругопластических тел, аналогом которой в теоретической механике является динамика тел переменной массы. В зависимости от конкретных условий, процесс наращивания вязкоупругих тел может происходить как дискретно, так и непрерывно.

Растущие, неоднородно стареющие вязкоупругие тела, характеризуются тем, что в процессе наращивания и загружения у них изменяются не только конфигурация и объем, но и упругие и реологические свойства, как во времени, так и в пространстве. Учет временной истории развития и загружения тел часто приводит к качественным изменениям в их механическом поведении.

В работе Ильичева В.А. (2004) показано, что при проектировании крупных наземных и подземных сооружений, особенно в условиях городской застройки, необходимо выполнение поэтапного геотехнического расчета деформаций и напряжений, возникающих в грунтовом основании и возводимых конструкциях, начиная с процесса строительства и заканчивая этапом эксплуатации. При этом результаты этих расчетов могут отличаться от обычных на порядок, а иногда и с изменением знака, в зависимости от очередности технологии выполнения работ.

МПД позволяет проводить совместные расчеты сооружений и их основания одновременно и исследовать изменения напряженно-деформированного состояния в заданном отрезке времени с подробным учетом технологии всех строительных и монтажных работ, а также очередности введения сооружения в эксплуатацию. Так как МПД предназначен для решения задач строительной механики и механики деформируемого твердого тела, то в совместных расчетах наземных сооружений на грунтовом основании является вполне естественным использование некоторых основных закономерностей механики грунтов.

Все расчеты в данной работе выполнены при затухающей неустановившейся ползучести грунта. При расчетах осадок оснований сооружений и их эволюции важно установить, когда применять ту или иную теорию деформации грунтов: одну ли теорию ползучести или с одновременным учетом фильтрационной консолидации или с учетом сжимаемости поровой воды, структурности грунтов и т.п.

Таким образом, можно прогнозировать эволюцию напряженно-деформированного состояния сооружения на любой длительный срок для определения их долговечности и надежности. Это, в конечном итоге, приведет к экономии материалов и ресурсов.

Рассмотрим совместный расчет во времени четырехъярусного железобетонного сооружения и его основания в пространственной постановке (Тер-Эммануильян Т.Н. 2005).

Здание возводится в четыре этапа. Учитываются собственный объемный вес возводимого сооружения и полезная нагрузка, которая прикладывается на последнем, четвертом, этапе (возведение и дальнейшая эксплуатация). На рисунке1 (a–d) представлены четыре этапа растущего сооружения, находящегося на грунтовом основании.

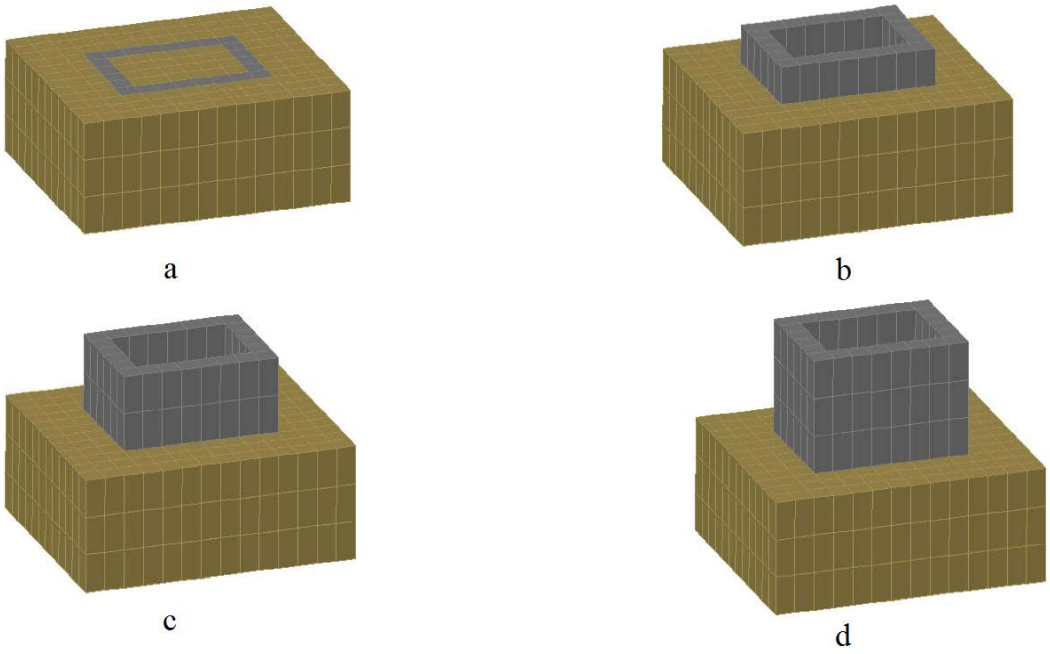


Рисунок 1. Этапы растущего (возводимого) сооружения.
a) возведение фундамента; b) первый ярус; c) второй ярус; d) третий ярус.

Для задач о влиянии на напряженно-деформированное состояние основания дополнительного статического нагружения собственным весом проектируемого здания является допущением о малости деформаций по отношению к размерам деформируемой области. Это же допущение остается справедливым и при рассмотрении осадок здания вблизи огражденных котлованов подземных сооружений, естественных откосов и т.п. Гипотеза о малости деформаций неприменима лишь при рассмотрении смещений, сопоставимых с размерами деформируемой области (процесс оползания склона, потери устойчивости и пр.(Шашкин А.Г. и Шашкин К.Г.,2002).

Поведение упругоползучего материала сооружений – бетона или железобетона с «размазанной» арматурой, описывается уравнениями наследственной теории старения с мерой ползучести С.В.Александровского (1973), а грунта - с мерой и ядром ползучести Ж.С.Ержанова (Ержанов Ж.С.и Каримбаев Т.Д. 1975).

Расчетная схема задачи представлена на рисунке 2. В виду наличия двух плоскостей симметрии, рассматривается только 1/4 часть.

Совместный расчет осуществляется путем использования обобщенной, единой матрицы жесткости системы, трансформируемой во времени и являющейся обратимой за счет использования граничных условий в основании.

Расчетная область разбита на 144 объемных конечных элемента с 266 узлами. Граничные условия, в виде стержневых связей, показаны на рис.2. Используется 20-ти точечная временная шкала. Время нагружения первого этапа – 32,7 суток; последнего – 171,4 суток.

На рис.3 представлена деформированная схема расчетной области (масштаб деформации увеличен в 30 раз) для последней временной точки.

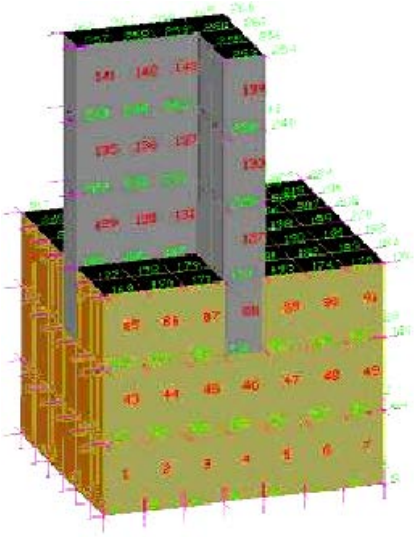


Рисунок 2. Расчетная схема.

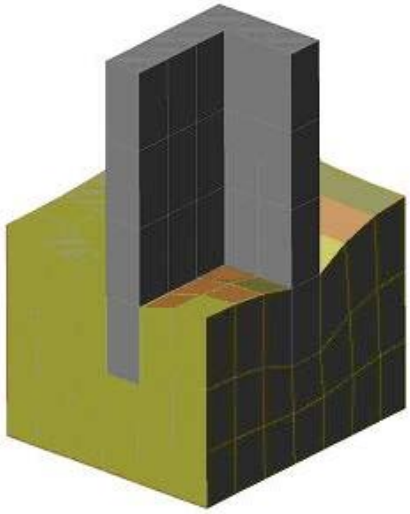


Рисунок 3. Деформированная схема в t_{20}.

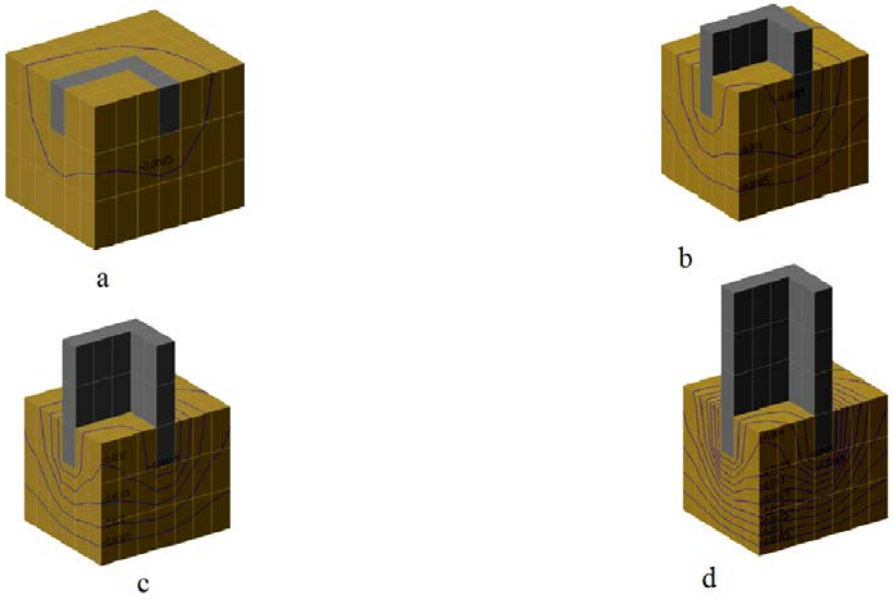


Рисунок 4. Изолинии вертикальных перемещений для a) $t=t_4$; b) $t=t_9$; c) $t=t_{14}$; d) $t=t_{20}$.

На основе специального алгоритма была разработана универсальная программа «FDM–3D», в которой, кроме основного ядра программы, написанного на языке FORTRAN, используются специальные модули, визуализирующие входные и выходные файлы, разработанные на языке Visual Basic в среде AutoCAD.

ISSN 1313-2539, Published at: http://www.scientific-publications.net

Результатом численного моделирования является полная картина изменения во времени компонентов векторов перемещений в 266 узлах для 20-ти временных точек, деформаций (6×144×20) и напряжений (6×144×20).

Изолинии вертикальных перемещений (м) по плоскостям симметрии и дневной поверхности показаны на рис.4 (a,b,c,d) для временных точек t_4 (54,6 суток), t_9 (98,4 суток), t_{14} (134,9 суток) и t_{20} (171,4 суток).

Для этих же временных точек на рисунке 5 (a,b,c,d) представлены изообласти и изолинии (t_{20}) нормальных вертикальных напряжений с учетом технологии возведения, а на рисунке 5 e – без учета технологии.

Здесь используется восьмиузловой пространственный конечный элемент с 24-мя степенями свободы.

Для последней временной точки t_{20} на рис.6 (a,b,c,d,e) представлены изолинии и изообласти нормальных горизонтальных и касательных напряжений. Интенсивность цветовой окраски на рис.5, 6 пропорциональна соответствующим величинам компонентов тензоров напряжений. Цветовая шкала представлена здесь же.

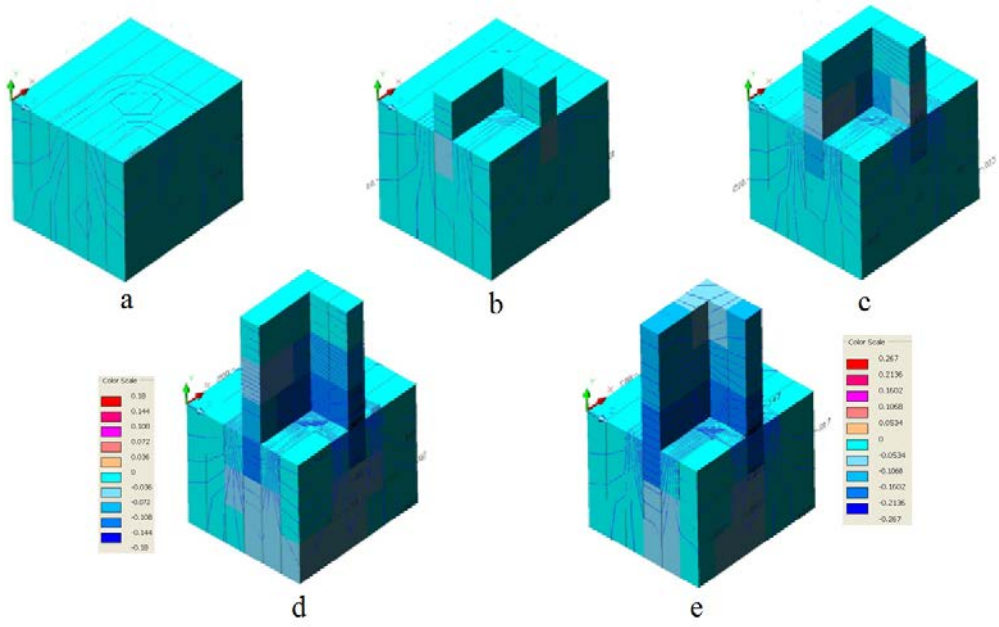


Рисунок 5. Изообласти и изолинии вертикальных нормальных напряжений для времени:a) $t=t_4$; b) $t=t_9$; c) $t=t_{14}$; d) $t=t_{20}$ (без учета технологии).

ISSN 1313-2539, Published at: http://www.scientific-publications.net

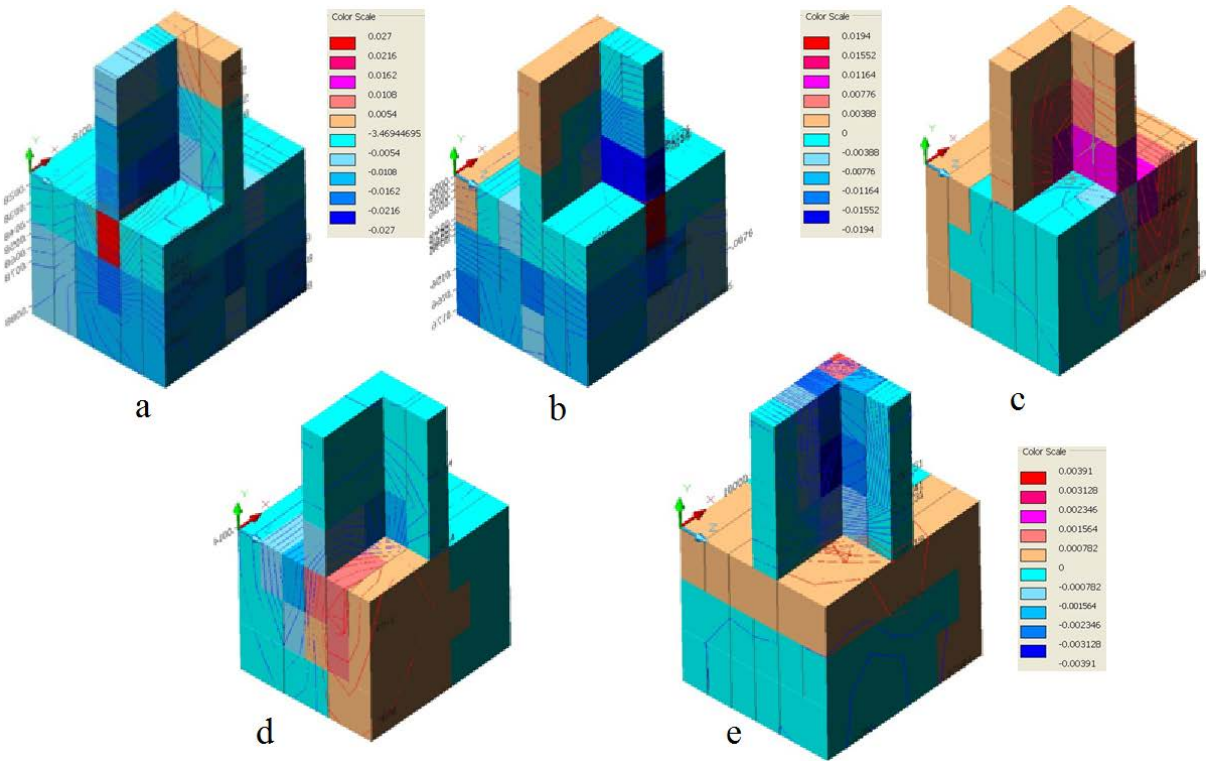


Рисунок 6. Изообласти и изолинии горизонтальных нормальных и касательных напряжений для t_{20}. a) σ_x; b) σ_z; c) τ_{xy}; d) τ_{xz}; e) τ_{yz}.

На рисунках 7-8 представлены эпюры осадок в двух взаимноперпендикулярных сечениях для четырех временных точек, соответствующих четырем этапам возведения: t_2, t_6, t_{12} и t_{20} (соответственно кривые 1,2,3,4)

1

2
3

4

Рисунок 7. Эпюры осадок (м) по плоскостям z0y.
(Кривые соответствуют временам: 1) t_2; 2) t_6; 3) t_{12}; 4) t_{20}).

1

2
3

4

Рисунок 8. Эпюры осадок (м) по плоскостям x0y (b).
(Кривые соответствуют временам: 1) t_2; 2) t_6; 3) t_{12}; 4) t_{20}).

На рисунке 9 построены, для четырех временных точек t_2, t_6, t_{12} и t_{20}, эпюры вертикальных перемещений w, находящихся на оси симметрии.

Графики изменения во времени вертикального перемещения одного из характерных узлов, представлен на рисунке 10.

1

1

2

3

Рисунок 9. Эпюры вертикальных перемещений w (м), находящихся на оси симметрии для t_2, t_6, t_{12}, t_{20}.

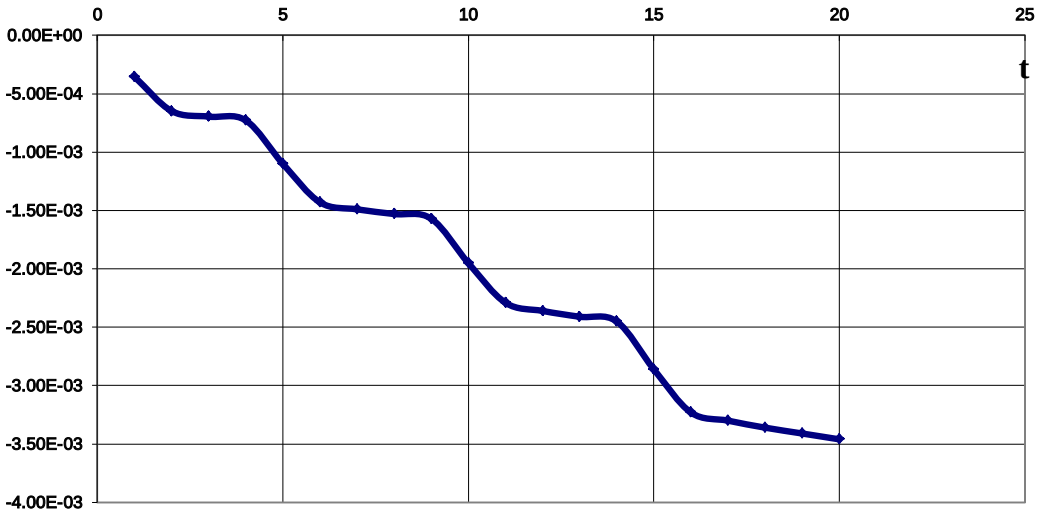


Рисунок 10. График изменения вертикального перемещения w(t) одного из узлов.

Анализ полученного решения выявляет значительный поэтапный рост во времени перемещений и деформаций. Компоненты тензора эволюции напряжений внутри каждого временного этапа практически не меняются.

Кроме того, была решена задача с учетом разгрузки, т.е. на четвертом этапе была снята полезная нагрузка. Эпюры вертикальных перемещений (эффект редеформации) представлены на рисунке 11.Для оценки влияния учета технологии возведения был выполнен совместный расчет сооружения и основания без учета технологии возведения.

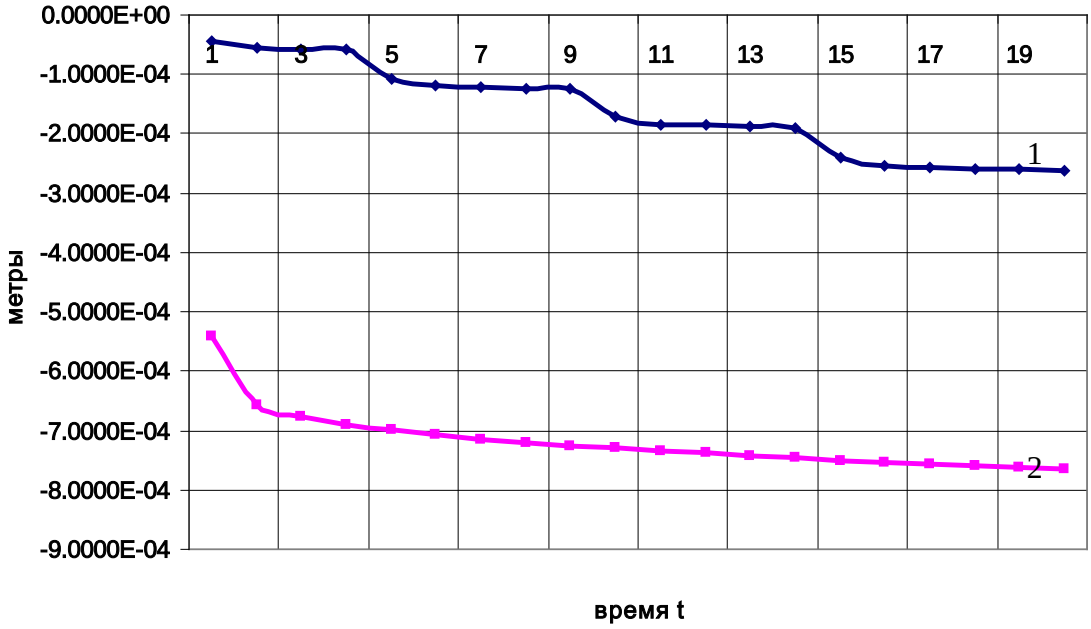


Рисунок 11. График изменения вертикальных перемещений узла 88 во времени [с учетом (1) и без учета технологии (2)].

4. ВЫВОДЫ:

1. Разработанный метод может быть использован в расчетах и проектировании крупномасштабных сооружений в виде зданий, плотин и др. объектов с учетом их совместной работы с грунтовым и скальным основанием, временной и пространственной неоднородности за счет ползучести материалов. Кроме того, разработанные пакеты прикладных программ удобны для пользователей ввиду их дружественного интерфейса, оптимальной автоматизации ввода исходных данных и обработке полученных результатов.

2. Разработанная в работе методика и полученные результаты позволяют прогнозировать изменение во времени НДС рассматриваемых строительных объектов с большой точностью на длительный период их эксплуатации, даже с учетом возможной реконструкции. Этот учет может привести к значительным изменениям НДС (на порядок и более) за весь период эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

Александровский С.В. (1973), Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменение температуры и влажности с учетом ползучести, Стройиздат, Москва.

Арутюнян, Н.Х., Дроздов, А.Д. и Наумов В.Э. (1987), Механика растущих вязкоупругопластических тел, Наука, Москва.

Ержанов Ж.С.и Каримбаев Т.Д. (1975), Метод конечных элементов в задачах механики горных пород, Наука, Алма-Ата.

Ильичев В.А. (2004), Опыт подземного строительства в Москве, *Труды Международной геотехнической конференции*, Алматы, с.41-42.

Тер-Эммануильян, Н.Я. (1975), Метод пространственно-временной дискретизации для решения линейных задач теории ползучести, *Сборник по вопросам математики и механики*, вып.7, Алма-Ата, КазГУ, с.55-61.

Тер-Эммануильян Т.Н. (2004), О расчете и прогнозировании НДС растущих конструкций, *Достижения науки в области строительной механики и инженерных сооружений*, том 2, Алматы, с.84-87.

Шашкин А.Г. и Шашкин К.Г. (2002), Взаимодействие здания и основания: методика расчета и практическое применение при проектировании, №2, Стройиздат, Санкт-Петербург.